MA2: Partiel de Math L1 MASS du 8/3/2014
13h-15h30, 418C, 419C, 471E, 479F

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits et doivent être rangés.

Exercice I:

1) On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par:

$$f(x,y) = (-10x + 24y, -4x + 10y).$$

Donnez la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ au départ et à l'arrivée.

2) a) L'application f est elle surjective?

b) Montrer qu'il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que $\lambda_1 < \lambda_2$ et que les noyaux $\ker(f - \lambda_i \,\mathrm{Id})$ soient non nuls pour $i \in \{1,2\}$.

3) a) Pour $i \in \{1,2\}$, donnez un vecteur u_i de $\ker(f - \lambda_i \,\mathrm{Id})$ d'ordonnée égale à 1.

b) Montrer que (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

4) Quelle est la matrice B de f dans la base (u_1, u_2) au départ et à l'arrivée.

5) En déduire la valeur de A^n pour tout entier naturel n.

Exercice II:

Pour tout entier n strictement positif, on note E_n l'espace vectoriel des polynômes en X de degré strictement inférieur à n. On considère l'application:

$$\begin{array}{rccl} f: & E_3 & \to & E_2 \\ & P(X) & \mapsto & P'(X) - X \cdot P''(X) \end{array}$$

1) Montrer que f est une application linéaire.

2) Donnez la matrice de f dans la base $(1, X, X^2)$ de E_3 et $(1, X)$ de E_2.

Exercice III:

On considère une application linéaire g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que:

$$g^{-1}(\vec{0}) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x - 3y + 2z = 0 \right\}$$

et

$$g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1) *Question de cours :* Donnez la définition du noyau et de l'image d'une application linéaire.

2) a) Donnez une base du noyau de g.

b) Quel est le rang de g ?

c) A-t-on $\mathbb{R}^3 = \ker g \oplus \mathrm{Im} g$?

3) On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Montrez que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

4) Donnez la matrice B de g dans la base $(v_i)_{(1 \leq i \leq 3)}$ de $\mathbb{R}^3$ au départ et à l'arrivée.

5) Quelle est la matrice de passage P de la base canonique à la base $(v_i)_{(1 \leq i \leq 3)}$?

6) Quel est l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

7) Donnez la matrice A de g dans la base canonique au départ et à l'arrivée.

Exercice IV:

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $f \circ f = 0$.

1) Montrer que l'image de f est incluse dans son noyau.
2) L'application f est-elle inversible ?

Exercice V:

Pour tout $m \in \mathbb{R}$, soit $f_m : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$f_m(x, y, z, w) = (x - z - 2w, (m-1)y + 3z + 6w, (m+1)z + (m+1)^2 w, -x + m^2 z + 2w).$$

1) Donnez la matrice A_m de f_m dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2) a) Pour quelles valeurs de m l'application f_m est elle bijective?
   b) Quel est le rang de A_1?
   c) Donnez le rang de f_m en fonction de m.
3) a) Donnez une base du noyau de f_1.
   b) Donnez une base du noyau de f_{-1}.
   c) Donnez une base $\mathcal{B}$ de $\ker f_1 + \ker f_{-1}$
   d) Complétez la base $\mathcal{B}$ en une base $\mathbb{R}^4$.